DIFFERENT PROCEDURES TO FIND NUMBERS IN AN INTERVAL WITH HIGH SCHOOL STUDENTS

DIFERENTES PROCEDIMIENTOS PARA HALLAR NÚMEROS EN UN INTERVALO CON ESTUDIANTES DE BACHILLERATO

Mayra Zulay Suárez Rodríguez
Cinvestav
mayra.suaez@cinvestav.mx

Ana Isabel Sacristán
Cinvestav
asacrist@cinvestav.mx

In this report we show an investigation of how high-school students learn strategies to find intermediate numbers in an interval to understand the property of numerical density. Research has shown that some high-school students have difficulty in understanding this property. To mitigate this difficulty, we proposed a Hypothetical Learning Trajectory, using school mathematics topics, for high-school students to learn about numerical density. Our study showed that some students recognized that there is an infinite quantity of intermediate numbers in an interval; however, all the participants had difficulty understanding why there is no successor in a set other than the natural or integer numbers.

Keywords: Learning Trajectories and Progressions, Mathematical Representations, Number Concepts and Operations, Design Experiments

Introduction and Research Questions

The number density property has been poorly understood by students of all school grades (Vamvakoussi & Vosniadou, 2010): some believe that there is no number in an interval and others believe that there is a finite quantity of numbers in an interval, in sets other than those of the natural numbers or integers. The density property means that a number can be found in an interval; this implies that: a) there is no number that has a successor, and b) there is an infinite quantity of numbers in an interval. For example, in the research carried out by González-Forte et al. (2021), students of 5th and 6th grade of elementary school (10-12 years old) and from 1st to 4th grade of high school (12-16 years old) answered that there was a finite amount of numbers in the interval between 3.49 and 3.50; some students even mentioned that there was only one number in that interval. There are also situations where students believe that the extremes of an interval (not natural, not integer) are consecutive; therefore they believe that there is not any other number in that interval (Vamvakoussi & Vosniadou, 2010). For example, in the study carried out by Cabarcas and Soler (2017), 9th grade students (around 15 years of age) believed that a rational number had an immediate predecessor and successor. They believed that the successor of 14/4 was 15/4 because their numerators are consecutive with the same numerator; and that there is a finite quantity of numbers in an interval of the rational numbers.

On the other hand, in the studies carried out by Neumann (1998) and Vamvakoussi and Vosniadou (2010), some students said that there are only decimal numbers between decimals, but not fractions; in the same way, they believed that there are fractions between fractions, but not decimal numbers. In Neumann's (1998) study, students had difficulty accepting that there are fractions between 0.3 and 0.6. Vamvakoussi and Vosniadou (2010) concluded, then, that students not only decided what type of symbolic representation the numbers belonging to an interval should have, but also how many there should be. For example, in their research, a student stated that there could be more numbers between 0.001 and 0.01 if the decimal numbers

(the intermediate ones) were expressed in fractions and that thus there could be an infinity. For this reason, Duval (1995/2004) emphasizes for students to engage with different representations of a mathematical object from an early age, since learning mathematics implies the use of different semiotic registers (arithmetic, algebraic, geometric, etc.) of representation (fractional, decimal, etc.).

In order for a student to understand about number density –which implies understanding that there is no successor for a decimal, rational or real number–, we designed and put into practice a Hypothetical Learning Trajectory (HLT) (Simon, 1995), following the principles of Design-Based Research (DBR) (Cobb and Gravemeijer, 2008). A HLT is a sequence of activities that hypothesizes on how to support a student in their learning process of a mathematical concept (Simon, 1995). For our HLT, we used different topics from school mathematics that would allow a student to understand number density, as suggested by McMullen and Van Hoof (2020).

We present below the aims of a study that began in 2020 and of which we have already given some results in Suárez-Rodríguez and Sacristán (2022):

a) Study the previous conceptions of the students participating in the study regarding the property of numerical density. For this, we used a diagnostic questionnaire (as a pre- and post-test).

b) Analyze the actions of the students during the development of the implementation of the activities proposed in the HLT, in relation to the property of numerical density and the property of the discrete of natural numbers.

Theoretical framework

Thinking about the discrete and the dense

Discrete mathematics is the basis of everything that corresponds to natural numbers or countable sets, while continuous mathematics is the basis of everything related to continuity (Levin, 2021; "Discrete Mathematics", 2021, pars. 2 -3). Hence, as Vamvakoussi and Vosniadou (2010) explain, only the natural numbers have the property of the discrete, because every natural number has a successor in terms of order relationships. That is, these authors emphasize that the terms "discrete" and "dense" are used with respect to the usual order relationship, thus the natural numbers are discrete, the rational numbers are dense, and the real numbers are dense and continuous. The property of the discrete is related to the natural numbers in the sense that any natural number has a successor (Vosniadou & Vamvakoussi, 2010); as indicated by Peano (1889/1979) in his axioms for the natural numbers, these numbers have a successor. On the other hand, Vamvakoussi and Vosniadou (2004) developed some categories based on the results of their research to find out how much students know about numerical density and the discrete property (Table 1).

Table 1: Categories of thinking about the discrete and the dense

Naive discreteness [Naive thinking about the discrete]	The thinking is that there is no number between two *consecutive false* rational numbers. Vamvakoussi and Vosniadou (2004) coined this expression to refer to the idea that a successor of a rational number exists.
Advanced discreteness [Advanced thinking about the discrete]	The thinking is that there is a finite quantity of numbers between two consecutive false rational numbers.
Discreteness–density [Mixed thinking between discrete and dense]	In some cases, the thinking is that between two rational numbers there is an infinity of numbers; and in other cases, that there is a finite number.

Naive density [Naive thinking about density]	There is an understanding that there is an infinity of numbers in an interval, but this situation is not justified by using the density property. The symbolic representation of the extremes of an interval influences this way of thinking; it is believed there can only be an infinite number of decimal numbers between decimals and an infinity of fractions between fractions, but not an infinity of fractions between decimals or otherwise.
Sophisticated density [Advanced thinking about density]	There is a sophisticated understanding of the density property; that is, it is understood that there is an infinite number of numbers between two rational numbers, regardless of their symbolic representation and this is justified through the use of the density property.

Semiotic registers of representation

Learning mathematics constitutes a space for the analysis of cognitive activities (conceptualization, reasoning, problem solving and text comprehension) that require the use of expressive and representational systems that are different from those of natural language or images (Duval, 1995/2004). As Duval states, representational systems constitute semiotic registers or registers of semiotic representation. These registers allow an individual to communicate ideas that are transformed into others without changing their meaning (Moreno & Sacristán, 1996). However, Duval (2006) recommends also using non-semiotic registers as contexts in which one can work with materials such as matches, sticks, basins, etc. We consider, then, the importance of using various representational registers to support the learning and understanding of the property of number density.

Methodological Framework and Methodology

Hypothetical Learning Trajectory (HTL)

The expression "hypothetical trajectory of learning" refers to a prediction that a researcher makes as to the path where learning might proceed (Simon, 1995). A trajectory is hypothetical because the "real" learning trajectory is not yet known in advance, and it becomes real when the students go through the proposed activities. Simon (1995) describes three components that a HLT must include: a) learning objectives, understood as a set of aims that are expected to be achieved for the student to build new knowledge, b) learning or instructional activities that follow a sequence, and c) hypothetical learning process, in which conjectures are proposed to support the student's learning process. The researcher can make modifications to any or all of the three components of a trajectory in order for them and the students to build and improve their knowledge.

Design and development of HLT activities

As we mentioned, our research methodology follows the guidelines of Design-Based Research (DBR). The DBR is a methodological approach in which the researcher carries out a systematic study of the design, development and assessment of educational interventions in different cycles, and for this, hypotheses are suggested through a HLT (Cobb & Gravemeijer, 2008). In this report we show some results of one of two cycles of research activities (the other is being carried out during the year 2023). In this first cycle, four students between the ages of 15 and 17 from Colombia participated: Angie, Paola and Néstor who were in high-school and Violeta, who was in the last year of middle-school. Some activities were carried out in person and others virtually. The design corresponding to the first cycle of activities involved three phases: The students answered the same questionnaire in both the first and third phases, and in the second, they solved HLT activities.

First and third phase. *(Pretest and post-test).* The students answered a questionnaire of four questions related to the number of numbers that an interval can have. These questions were based on those proposed by Suárez-Rodríguez and Figueras (2020) and Vamvakoussi and Vosniadou (2004). We wanted to know how much students know about numerical density –before and after the implementation of the HLT– according to the categories elaborated by Vamvakousi and Vosniadou (2004) (Table 1). The pretest lasted approximately 30 minutes, while the post-test, 10 minutes. In this report we present the answers to the question: How many numbers are there between 0 and 1?
Second phase. *(HLT activities).* The HLT includes four activity sessions in which a hypothesis was proposed for each one (Table 2). We wanted to propose hypotheses related to various topics of school mathematics which we considered could support students to learn and understand about numerical density. Each session lasted about 1h30'.

Table 2: HLT sessions with their corresponding hypotheses

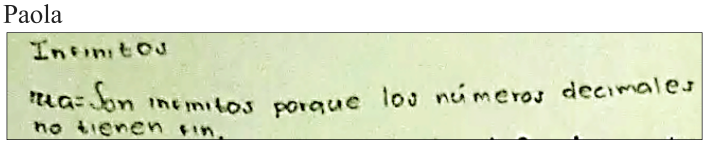
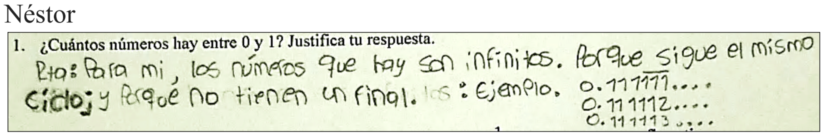
Sessions	*Hypotheses*
Session 1. Initial approaches to number density.	From two situations: one related to everyday life and the other related to a hypothetical scenario, it is thought that the student can have initial approaches to the property of density.
Session 2. Approach to number density through the similarity of triangles.	It is considered that by using triangle similarity. students can learn about the density property of rational numbers.
Session 3. Approach to number density through arithmetic progressions and geometric progressions.	It is possible that by finding arithmetic and geometric halves in an interval, students can understand the density property of rational numbers in the set of real numbers.
Session 4. Approach to numerical density through the property of continuity.	Using the continuity property, students may understand the density property of irrational numbers in the set of real numbers.

Results

First phase: Pre-test results

Table 3 shows the answers of the students to the question: "How many numbers are there between 0 and 1?" We classified those answers according to the categories proposed by Vamvakoussi and Vosniadou (2004) (Table 1).

Table 3: Students responses to a pretest question

Responses	*Types of thinking*
Paola  Infinitos Rta: Son infinitos porque los números decimales no tienen fin. *Infinities* *They are infinite because decimal numbers have no end.*	*Naive density* *[Naive thinking about density]*
Néstor  1. ¿Cuántos números hay entre 0 y 1? Justifica tu respuesta. Rta: Para mi, los números que hay son infinitos. Porque sigue el mismo ciclo; y porque no tienen un final. Ej: Ejemplo. 0.111111.... 0.111112.... 0.111113.... *For me, the numbers that there are are infinite. Because it follows the same cycle; and because they don't have an end. Example:* $0.111\overline{111}$ ... 0.111112 ... 0.111113 ...	*Sophisticated density* *[Advanced thinking about density]*

Violeta 1. ¿Cuántos números hay entre 0 y 1? Justifica tu respuesta. No hay ningun numero porque el 0 esta antes del 1 *There is no number because 0 is before 1.*	*Naive discreteness* *[Naive thinking about the discrete]*
Angie hay infinitos, debido que existe el 0.1, 0.2, 0.3(...). *There are infinities, because there are 0.1, 0.2, 0.3 (...).*	*Naive density* *[Naive thinking about density]*

We observe in Table 3 that Paola and Angie show a tendency to have a *Naive thinking about density*, since both stated that there are indeed an infinite quantity of numbers between 0 and 1. However, they did not give a process to find these intermediate numbers in the interval. Néstor also indicated that there is an infinite quantity of numbers between 0 and 1. He used decimal writing as a semiotic representation in an arithmetic register and wrote examples of numbers in periodic decimal writing. That is, Néstor justified his answer by means of a process of potential infinity of adding decimals to the decimal part of a periodic number as a way of finding intermediate numbers between 0 and 1. Violeta manifested a *Naive thinking about the discrete*: For her, the numbers 0 and 1 are consecutive. It is possible that she is only considering 0 and 1 as natural numbers, so she would be in a natural number domain knowledge system.

Second phase: Results of HLT activities

Next, we describe some student activities during sessions 1, 3 and 4 (Table 2) of the HLT. **Session 1**. In this session, students solved two activities. In one of them, the students did a brief reading about the beginnings of the long jump as a sport and answered five questions. In Figure 1 we show Paola's response to the question: "According to the reading, which athlete records are between 5.40 and 7.70?" She responded appropriately, pointing out all the numerical records of the athletes, between 5.40 and 7.70 (5.41, 6.20, 6.375, 7.05, 7.40, 7.51, 7.54, 7.60 and 7.605). Subsequently, the students answered the question: "Do you think that 7.40 has a successor? Explain your answer." Figure 2 shows their responses.

According to the reading, which records, of the athletes, are between 5.40 and 7.70?

5,41 - 6,20 - 6.375 - 7,05 - 7,40 - 7,51 - 7.54 - 7,60 - 7,605

Rta: Todos los registros se encuentran entre 5.40 y 7.70.

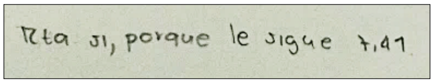
All records are between 5.40 and 7.70

Figure 1: Paola's response (Session 1)

We observe in Figure 2 that Paola, Violeta and Angie pointed to 7.41 as the "successor" of 7.40. Néstor not only writes 7.41, but also writes other numbers like 7.42 and 7.43 (numbers with two decimal places) and numbers like 7.401, 7.402, and 7.403 (numbers with three decimal places) as "successors" to 7.40. In general, we consider that students believe that there is a successor to a decimal number that depends on the number of decimal places (i.e. "the successor" of a number with one decimal place is another that must have a decimal place. However, we do not we know what could happen with a number like 7.99 (number with two decimal places); possibly students would write 7.100 (a number with three decimal places).

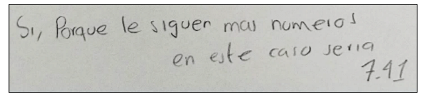
Do you think 7.40 has a successor? Explain your answer.

Paola



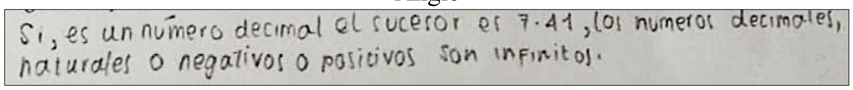
Yes, because it is followed by 7.41

Violeta



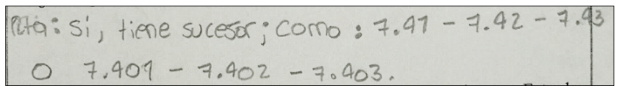
Yes, because it is followed by more numbers [,] in this case it would be 7.41

Angie



Yes, it is a decimal number, the successor is 7.41, the decimal, natural or negative or positive numbers are infinite.

Néstor



Yes, it has a successor; as 7.41-7.42-7.43 or 7.401-7.402-7.403

Figure 2: Responses of the four students (Session 1)

Session 3. In this session, activities related to arithmetic progressions and to geometric progressions were carried out. The hypothesis is for students to encounter other ways to find numbers in an interval, in order to understand the density property of rational numbers. Students were asked to find five arithmetic means between 4 and 22 from the general expression of the nth term of the sequence: $u = a + (n - 1)d$, where a is the first term, n the number of terms and d the difference between one term and the next. Figure 3 shows the task carried out by Néstor where he found the five arithmetic means between 4 and 22 (7, 10, 13, 16 and 19) with $d = 3$. Later, the students found other arithmetic means when they were asked to reduce the difference in half (i.e. $d = 1.5 = 3/2$). Figure 4 shows the work done by Angie, where she found the arithmetic means in decimal writing: 5.5, 7.0, 8.5, 10, 11.5, 13, 14.5, 16, 17.5, 19 and 20.5.

With the previous information [reading about the long jump], find five arithmetic means between 4 and 22.

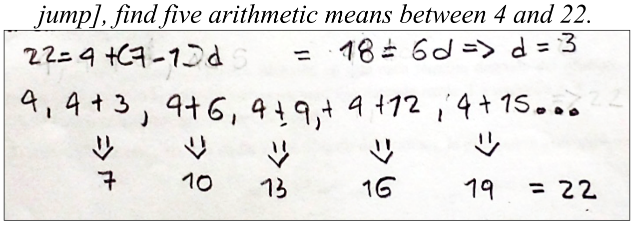


Figure 3: Nestor's response (Session 3)

If d were halved, that is, d=1.5, or d=3/2, what would be the new arithmetic means between 4 and 22?

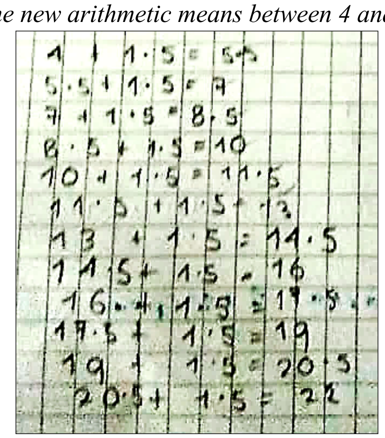


Figure 4: Angie's response (Session 3)

Subsequently, the students answered the question: “Can you find more numbers between 4 and 22 (different from the numbers found in the previous questions)? How many? Explain your

answer”. In Table 4 the answers of the students are shown; we tried to classify them according to the categories by Vamvakoussi and Vosniadou (2004) (Table 1).

Paola mentions that with half the difference (*1.5*), more terms can be found (*1.5/2 = 0.75*); likewise, with half of 0.75 which is 0.375, and so on. So her answer is in the category *Advanced thinking about density*, since she justifies a process to find more numbers. It is worth mentioning that Paola not only indicates that with the process of finding half the difference, more numbers can be found, but also through “doubling”. However, it seems that she has an inappropriate concept of the term doubling, since she writes *3.2, 3.3, 3.4*,..., that is, she refers to adding two tenths, three tenths, four tenths, etc. to the number *3* (the difference of the arithmetic progression). Néstor exhibits a *Naive thinking about density* when he affirms that an infinity of numbers can be found. Violeta answers that “10 can be found”, that is, a finite quantity of numbers between 4 and 22, which we consider is *Advanced thinking about the discrete*. Also Angie shows *Advanced thinking about the discrete* in this question, since she indicates a finite quantity: 3. It is not clear what Angie means by “for mathematics there are many paths”. It is possible that she refers to the fact that there are several solutions to solve a problem and that the method she chose (which we do not know) leads her to say 3.

Table 4: Responses of the four students (Session 3)

Can you find more numbers between 4 and 22 (different from the numbers found in the previous questions)? How many? Explain your answer	
Student’ responses	Types of thinking
Si, si tomamos la diferencia de 1.5/2 = 0,75 - También con la diferencia de 0,375 y así sucesivamente sacando la mitad o duplicando (3.2) (3.3) (3.4)... *-Yes, if we take the difference of 1.5/2 = 0.75* *-Also with the difference of 0.375 and so on, taking half or duplicating (3.2) (3.3) (3.4)...*	*Paola* *Advanced thinking about density*
Rta: La Respuesta es, son infinitos. *The answer is, they are infinite.*	*Néstor* *Naive thinking about density*
se pueden encontrar 10. *10 can be found.*	*Violeta* *Naive thinking about the discrete*
3. Si ya que para las matemáticas hay muchos caminos yo diría que (3) numeros mas *Yes, since for mathematics there are many paths I would say (3) more numbers*	*Angie* *Naive thinking about the discrete*

Session 4. In this session, an activity was designed based on one proposed by Tovar (2011). The hypothesis is that a student can understand the density of irrationals in the real numbers, from the continuity property of the number line. Students constructed a square of side length 1 on the number line and rotated the diagonal of the square on the line clockwise (see the segment $\overline{AX}$ in Figure 5; Violet’s example).

The students zoomed in several times with GeoGebra and noticed that the “right end” of the diagonal segment did not coincide with any rational number on the line, thus showing that an irrational number (in this case $\sqrt{2}$) can be found in a given interval. Subsequently, they wrote

four intervals that enclosed the point that did not coincide with any rational. Figure 6 shows the task performed by Violeta after completing the construction of the square with side 1 (Figure 5). Violeta writes four intervals that contain point X. It is possible that she has forgotten to write the decimal point (used in Colombia). The intervals are: (1.414, 1.4144), (1.4136, 1.4146), (1.4132, 1.4148), and (1.413, 1.415).

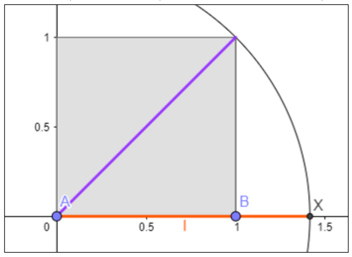


Figure 5: Violet's graph in GeoGebra (S4)

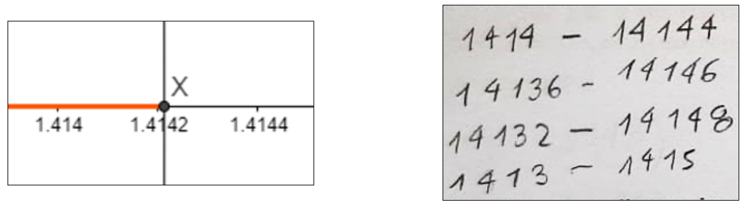
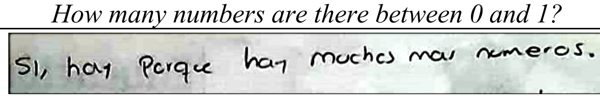


Figure 6: Graph in GeoGebra and intervals written by Violeta that enclose point X (Session 4)

Third phase: Post-test results

The students showed an evolution in their responses in the post-test, as compared to the answers in the pre-test. For example, Violeta wrote: "Yes there are because there are many more numbers" in her answer to the question: "How many numbers are there between 0 and 1?" (Figure 7). Contrary to what Violeta wrote in her pre-test to this same question: "There is no number because 0 is before 1" (Table 3). We consider that Violeta has been able to understand that there are numbers between 0 and 1 Although she indicates that "there are many more numbers" we do not know if she refers to a finite or infinite quantity of numbers. In the cases of Paola and Néstor, they preserved the same idea that there are infinite numbers in a given interval, both in the pre-test and in the post-test. However, during the pre-test, Paola did not justify how to find intermediate numbers in an interval, while in the post-test she was already able to justify a method to find these numbers. Angie also mentioned the existence of an infinite number of intermediate numbers in an interval during the development of the pre-test; however, during the post-test she talked about an infinite number of "intervals" and did not justify the reason for her answer.

How many numbers are there between 0 and 1?



Yes, there is because there are many more numbers.

Figure 7: Violeta's response to the post-test

Conclusions

The study sought ways to promote in high-school students procedures to find intermediate numbers in an interval that implied learning and understanding of numerical density in various activities. These HLT activities included school mathematics topics such as arithmetic and geometric progressions, the construction of a square with side length 1, similarity of triangles, as first approaches to the density property of decimal numbers.

We observed that the students did not seem to interpret "successor" correctly. Apparently, the idea of a successor for the students was a number greater than the one given, or the one that follows it in a subset of numbers with the same characteristics (same number of decimal places). For this reason, it is necessary to reconsider how the questions were posed, related to the

existence of a successor in a set other than those of the natural numbers or of the integers. That is, we must (re)design the activities so that students may realize the non-existence of a successor in the sets of rational numbers (expressed as fractions, and/or as decimal numbers), and of the real numbers.

Acknowledgments

To Conacyt and Cinvestav for financing this research study.

References

Cabarcas, B., y Soler, C. (2017). Aproximación a la propiedad de densidad del conjunto de los números racionales desde las representaciones en el registro como fracción y el registro decimal [Tesis de Maestría, Pontificia Universidad Javeriana]. https://repository.javeriana.edu.co/handle/10554/37869

Cobb, P., & Gravemeijer, K. (2008). Experimenting to support and understand learning processes. In A.E. Kelly, R.A. Lesh y J.Y. Baek (Eds.). *Handbook of design research methods in education. Innovations in Science, Technology, Engineering and Mathematics Learning and Teaching*, (pp. 68-95). Lawrence Erlbaum Associates.

Duval, R. (2004). *Semiosis y Pensamiento Humano. Registros Semióticos y Aprendizajes Intelectuales*. Universidad del Valle.

Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *La gaceta de la RSME, 9.1*, 143-168.

González-Forte, J. M., Fernández C., Van Hoof, J. y Van Dooren, W. (2021). Formas de responder sobre la densidad de los números racionales de estudiantes de primaria y secundaria. En Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T. y Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 319 – 326). Valencia: SEIEM.

Levin, O. (2021). *Discrete Mathematics: An Open Introduction.* (3ª ed.). Independently Published.

Matemática discreta. (2021, 30 de octubre). *Wikipedia, La enciclopedia libre*. https://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Matem%C3%A1tica_discreta&oldid=139389762.

McMullen, J., & Van Hoof, J. (2020) The role of rational number density knowledge in mathematical development. *Learning and Instruction*, 65, 101228. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2019.101228

Moreno, L., & Sacristán, A. (1996). Representaciones y Aprendizaje. *Investigaciones en Matemática Educativa*, 277-289. Grupo Editorial Iberoamérica.

Neumann, R. (1998). Students' ideas on the density of fractions. In H. G. Weigand, A. Peter-Koop, N. Neil, K. Reiss, G. Törner, & B. Wollring (Eds), *Proceedings of the annual meeting of the Gesellschaft fur Didaktik der Mathematik* (pp. 97-104). http://webdoc.sub.gwdg.de/ebook/e/gdm/1998/

Peano, J. (1979). *Los principios de la aritmética. Expuestos según un nuevo método* (Trad. J. Velarde). Pentalfa Ediciones. (Trabajo original publicado en 1889).

Simon, M. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26, 114–145. https://doi.org/10.2307/749205

Suárez-Rodríguez, M., & Figueras, O. (2020). An approach to density in decimal numbers: a study with pre-service teachers. In A.I. Sacristán, J.C. Cortés-Zavala & P.M. Ruiz-Arias, (Eds.). *Mathematics Education Across Cultures: Proc. 42nd Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Mexico* (pp. 803-819). Cinvestav / AMIUTEM / PME-NA. https:/doi.org/10.51272/pmena.42.2020-122

Suárez-Rodríguez, M., & Sacristán, A. I. (2022). Different ways of learning number density: a hypothetical trajectory with high school students. In A. E. Lischka, E. B. Dyer, R. S. Jones, J. Lovett, J. Strayer & S. Drown, (Eds). *Proceedings of the 44th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 911-928). Middle Tennessee State University.

Tovar, J. (2011). *Un acercamiento al concepto y completitud de los números reales* [Tesis de maestría, Universidad Nacional de Colombia]. https://repositorio.unal.edu.co/bitstream/handle/unal/10182/johnedinsontovargil.2011.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Vamvakoussi, X., & Vosniadou, S. (2004). Understanding the structure of the set of rational numbers: A conceptual change approach. *Learning and Instruction*, *14*, 453-467. doi:10.1016/j.learninstruc.2004.06.013

Vamvakoussi, X. y Vosniadou, S. (2010). How many decimals are there between two fractions? Aspects of secondary school students' understanding of rational numbers and their notation. *Cognition and Instruction*, *28*(2), 181-209. https://doi.org/10.1080/07370001003676603

DIFERENTES PROCEDIMIENTOS PARA HALLAR NÚMEROS EN UN INTERVALO CON ESTUDIANTES DE BACHILLERATO

DIFFERENT PROCEDURES TO FIND NUMBERS IN AN INTERVAL WITH HIGH SCHOOL STUDENTS

Mayra Suárez-Rodríguez
Cinvestav
mayra.suarez@cinvestav.mx

Ana Isabel Sacristán
Cinvestav
asacrist@cinvestav.mx

En este informe mostraremos una investigación de cómo estudiantes de bachillerato aprenden estrategias para hallar números intermedios en un intervalo con el fin de comprender sobre la propiedad de densidad numérica. Investigaciones han mostrado cómo algunos estudiantes que terminan su bachillerato tienen dificultad para comprender sobre esta propiedad. Para mitigar esta dificultad propusimos una Trayectoria Hipotética de Aprendizaje en la que incluyera temas de la matemática escolar que nos permitiera plantear hipótesis de cómo un estudiante puede aprender sobre densidad numérica. La investigación reflejó que algunos estudiantes de bachillerato reconocen que existe una infinidad de números en un intervalo, sin embargo, todos los participantes tuvieron dificultad para comprender por qué no existe un sucesor en un conjunto que no sea el de los números naturales o enteros.

Palabras clave: Trayectorias de aprendizaje y progresiones, representaciones matemáticas, conceptos y operaciones numéricas, experimentos de diseño

Introducción y Preguntas de Investigación

La propiedad de densidad numérica ha sido poco comprendida por estudiantes de todas las etapas escolares (Vamvakoussi y Vosniadou, 2010): algunos creen que no existe un número en un intervalo y otros creen que hay una cantidad finita de números en un intervalo, en conjuntos diferentes a los de los números naturales o enteros. Dado un intervalo, la propiedad de densidad numérica indica que se puede encontrar un número en él, lo que implica que: a) no existe un número que tenga sucesor (inmediato), y b) existe una infinidad de números en un intervalo. Por ejemplo, en la investigación realizada por González-Forte et al. (2021), estudiantes de 5to y 6to de primaria (10-12 años) y de 1° a 4° de secundaria (12-16 años de edad) respondieron que había una cantidad finita de números en el intervalo entre 3.49 y 3.50; incluso, algunos estudiantes mencionaron que solo existía un número en dicho intervalo. También se presentan situaciones donde estudiantes creen que los extremos de un intervalo (no natural, no entero) son consecutivos, por ello creen que no hay otro número en él (Vamvakoussi y Vosniadou, 2010). Por ejemplo, en el estudio realizado por Cabarcas y Soler (2017), estudiantes de noveno grado (alrededor de 15 años de edad) creían que un número racional tenía un antecesor y un sucesor, inmediatos. Ellos creían que el sucesor de 14/4 era 15/4 porque sus numeradores son consecutivos con un mismo numerador.

Por otro lado, en los trabajos de Neumann (1998) y de Vamvakoussi y Vosniadou (2010) se ha encontrado que algunos estudiantes tienden a decir que solo hay números decimales entre decimales, pero no fracciones; de igual manera, que hay fracciones entre fracciones, pero no números decimales. En el estudio de Neumann (1998), los estudiantes tuvieron dificultad para aceptar que entre 0.3 y 0.6 hay fracciones. Vamvakoussi y Vosniadou (2010) concluyeron, entonces, que los estudiantes no solo decidían qué tipo de representación simbólica debían tener

los números que pertenecen a un intervalo sino cuántos debía haber. Por ejemplo, en el trabajo de estas autoras, un estudiante manifestaba que podía haber más números entre 0.001 y 0.01 si los números decimales (los intermedios) se expresaban en fracciones y que así podía haber una infinidad. Por ello, Duval (1995/2004) recalca que un estudiante pueda manejar diferentes representaciones de un objeto matemático desde edades tempranas, pues aprender matemáticas implica que haya un uso de diferentes registros semióticos (aritmético, algebraico, geométrico, etc.) de representación (fraccionaria, decimal, etc.).

Con la finalidad de que un estudiante pueda comprender sobre densidad numérica –que implica comprender que no existe un sucesor para un número decimal, racional o real–, diseñamos y pusimos en práctica una Trayectoria Hipotética de Aprendizaje (THA) (Simon, 1995); que sigue los lineamientos de una Investigación Basada en Diseño (IBD) (Cobb y Gravemeijer, 2008). Una THA es una secuencia de actividades que siguen hipótesis de cómo apoyar a un estudiante en su proceso de aprendizaje sobre un concepto matemático (Simon, 1995). Para esta THA tomamos diferentes temas de la matemática escolar que permitieran comprender sobre densidad numérica, tal como lo sugieren McMullen y Van Hoof (2020). Presentamos a continuación objetivos que se propusieron para una investigación que se inició en 2020 y que en Suárez-Rodríguez y Sacristán (2022) ya habíamos mostrado algunos resultados:

a) Indagar sobre las concepciones previas de los estudiantes participantes en el estudio respecto a la propiedad de densidad numérica. Para ello se utiliza un cuestionario diagnóstico (pretest).
b) Indagar y evidenciar las actuaciones de los estudiantes durante el desarrollo de la puesta en marcha de las actividades propuestas en la THA, con relación a la propiedad de densidad numérica y a la propiedad de lo discreto de los números naturales.

Marco Teórico

Pensamiento sobre lo discreto y lo denso

La matemática discreta es la base de todo lo que corresponde con los números naturales o los conjuntos numerables, mientras que la matemática continua es la base de todo lo relacionado con la continuidad (Levin, 2021; “Matemática discreta”, 2021, parfs. 2-3). Como explican Vamvakoussi y Vosniadou (2010), la propiedad de lo discreto solo la cumplen los números naturales, ya que cada natural tiene un sucesor, en términos de relaciones de orden. Es decir, estas autoras hacen énfasis en que los términos “discreto” y “denso” se usan con respeto a la relación de orden habitual, así los números naturales son discretos, los números racionales son densos y los números reales son densos y continuos. La propiedad de lo discreto encierra todo lo vinculado con los números naturales en el sentido de que cualquier número natural tiene un sucesor (Vosniadou y Vamvakoussi, 2010); como lo indicó Peano (1889/1979) en sus axiomas para los números naturales, que estos números tienen un sucesor. Por otro lado, Vamvakoussi y Vosniadou (2004) elaboraron unas categorías con base en los resultados de su investigación para conocer qué tanto saben los estudiantes sobre densidad numérica y la propiedad de lo discreto (Tabla 1).

Tabla 1: Categorías de pensamiento sobre lo discreto y lo denso

Pensamiento ingenuo sobre lo discreto	Se considera que no hay otro número entre dos números racionales *consecutivos falsos* (expresión acuñada por Vamvakoussi y Vosniadou, 2004, para decir que existe un sucesor en los números racionales.)

Pensamiento avanzado sobre lo discreto	Se cree que hay un número finito de números intermedios entre dos números racionales consecutivos falsos.
Pensamiento entre lo discreto y lo denso	En algunas situaciones se piensa que entre dos números racionales hay una cantidad infinita de números, y en otros, que hay una cantidad finita.
Pensamiento ingenuo sobre lo denso	Se contempla que hay una infinidad de números en un intervalo, pero no se justifica la situación usando la propiedad de densidad. La representación simbólica de los extremos de un intervalo influye en la forma de pensar; se cree que solo puede haber una infinidad de decimales entre decimales, pero no fracciones; de igual modo sucede con fracciones entre fracciones.
Pensamiento sofisticado sobre lo denso	Hay una comprensión bastante sofisticada de la propiedad de densidad, es decir, se pone de manifiesto que se entiende que entre dos números racionales hay una infinidad de números, independientemente de su representación simbólica, y se justifica con la propiedad de la densidad.

Registros semióticos de representación

Aprender matemáticas constituye un espacio para el análisis de las actividades cognitivas (conceptualización, razonamiento, resolución de problemas y comprensión de textos) que requieren del uso de sistemas de expresión y de representación distintos a los del lenguaje natural o de las imágenes (Duval, 1995/2004). Estos sistemas de representación conforman *registros semióticos* o *registros de representaciones semióticas* (op. cit.). Estos registros permiten que un individuo pueda tener una comunicación de ideas que se transforman en otras sin cambiar su significado (Moreno y Sacristán, 1996). No obstante, Duval (2006) recomienda no solo limitarse a registros semióticos, sino también utilizar registros no semióticos como contextos en los que se pueda trabajar con materiales como cerrillas, palitos, cuencas, etc. Consideramos, entonces, la importancia de usar varios registros de representación para apoyar el aprendizaje y comprensión de la propiedad de densidad numérica.

Marco Metodológico y Metodología

Trayectoria Hipotética de Aprendizaje (THA)

La expresión "trayectoria hipotética de aprendizaje" se refiere a una predicción que hace un investigador en cuanto a la ruta por la cual el aprendizaje podría proceder (Simon, 1995). Una trayectoria es hipotética porque la trayectoria de aprendizaje "real" aún no se conoce de antemano, y se vuelve real cuando los estudiantes ponen en marcha las actividades propuestas (op. cit.). Simon (1995) elabora tres componentes que debe conformar una THA: a) *objetivos de aprendizaje*, entendidos como un conjunto de propósitos que se espera lograr para que el estudiante construya nuevos conocimientos, b) *actividades de aprendizaje*, que se conforma de actividades instruccionales siguiendo una secuencia, y c) *proceso hipotético de aprendizaje*, en el que se elaboran conjeturas para apoyar el proceso de aprendizaje del estudiante. El investigador puede realizar modificaciones en cualquiera o en todos los tres componentes de una trayectoria con el fin de que él como los estudiantes construyan y mejoren sus conocimientos (op. cit.).

Diseño y elaboración de las actividades de la THA

Como lo mencionamos, nuestra metodología de investigación sigue las pautas de una Investigación Basada en Diseño (IBD). La IBD es un enfoque metodológico en el que el investigador lleva a cabo un estudio sistemático de diseño, desarrollo y evaluación de intervenciones educativas en diferentes ciclos, y para ello se sugiere planteamientos de hipótesis a través de una THA (Cobb y Gravemeijer, 2008). En este informe mostraremos algunos resultados de uno de dos ciclos de actividades de la investigación (el otro se está llevando a cabo durante el año 2023). Para este primer ciclo participaron cuatro estudiantes con edades de entre

15 y 17 años, de Colombia: Angie, Paola y Néstor que cursaban el bachillerato y Violeta, el último año de la secundaria. Algunas actividades se llevaron a cabo de manera presencial y otras virtual. El diseño correspondiente al primer ciclo de actividades implicó tres fases: Los estudiantes respondieron un mismo cuestionario tanto en la primera como en la tercera fase, y en la segunda, resolvieron actividades de la THA.

Primera y tercera fase (pretest y postest). Los estudiantes respondieron a un cuestionario de cuatro preguntas relacionadas con la cantidad de números que puede tener un intervalo. Estas preguntas surgieron de las elaboradas por Suárez-Rodríguez y Figueras (2020) y Vamvakoussi y Vosniadou (2004). Se quiso conocer qué tanto saben los estudiantes sobre densidad numérica –antes y después de la implementación de la THA– de acuerdo con las categorías elaboradas por Vamvakousi y Vosniadou (2004) (Tabla 1). La duración del desarrollo del pretest fue de 30 minutos aproximadamente, mientras que la del postest fue de 10 minutos. En este informe mostraremos las respuestas de la pregunta: *¿Cuántos números hay entre 0 y 1?*

Segunda fase (actividades de la THA). La THA está compuesta por cuatro sesiones de actividades en las que se planteó una hipótesis para cada una (Tabla 2). Se quiso plantear hipótesis vinculadas con varios temas de la matemática escolar en las que consideramos que pueden apoyar al estudiante para aprender y comprender sobre densidad numérica. Cada sesión tuvo una duración de alrededor de 1h30’.

Tabla 2: Sesiones de la THA con sus hipótesis correspondientes

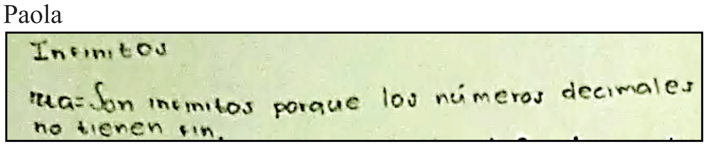
Sesión	*Hipótesis*
Sesión 1. Primeros acercamientos a la propiedad de densidad.	A partir de dos situaciones: una relacionada con la cotidianidad y otra vinculada con un escenario hipotético, se piensa que el estudiante puede tener sus primeros acercamientos a la propiedad de densidad.
Sesión 2. Acercamiento a la propiedad de densidad a través de la semejanza de triángulos.	Se contempla que usando semejanza de triángulos los estudiantes puedan aprender sobre la propiedad de densidad de los números racionales.
Sesión 3. Aproximación a la propiedad de densidad a partir de progresiones aritméticas y progresiones geométricas.	Es posible que hallando medios aritméticos y geométricos en un intervalo el estudiante comprenda la propiedad de densidad de los números racionales en el conjunto de los reales.
Sesión 4. Aproximación a la propiedad de densidad por medio de la propiedad de continuidad.	Se cree que usando la propiedad de continuidad los estudiantes comprenden la propiedad de densidad de los números irracionales en el conjunto de los reales.

Resultados

Primera fase: Resultados del pretest

En la Tabla 3 se muestran las respuestas de los estudiantes a la pregunta: *¿Cuántos números hay entre 0 y 1?* e intentamos clasificarlas según las categorías propuestas por Vamvakoussi y Vosniadou (2004) (Tabla 1).

Tabla 3: Respuestas de los estudiantes a una pregunta del pretest

Respuestas	*Tipos de pensamiento*
Paola  Infinitos Rta: Son infinitos porque los números decimales no tienen fin.	*Pensamiento ingenuo sobre lo denso*

Néstor 1. ¿Cuántos números hay entre 0 y 1? Justifica tu respuesta. Rta: Para mi, los números que hay son infinitos. Porque sigue el mismo ciclo; y Porqué no tienen un final. ~~los~~ : Ejemplo. 0.111111.... 0.111112.... 0.111113....	*Pensamiento sofisticado sobre lo denso*
Violeta 1. ¿Cuántos números hay entre 0 y 1? Justifica tu respuesta. No hay Ningun numero Porque el 0 esta antes del 1	*Pensamiento ingenuo sobre lo discreto*
Angie hay infinitos, debido que existe el 0.1, 0.2, 0.3(...).	*Pensamiento ingenuo sobre lo denso*

Se observa en la Tabla 3 que Paola y Angie muestran una tendencia a tener un pensamiento ingenuo sobre lo denso, ya que ambas manifestaron que sí hay una infinidad de números entre 0 y 1. Sin embargo, ellas no explicaron un proceso para hallar estos números intermedios en el intervalo. Néstor también indicó que hay infinidad de números entre 0 y 1. Él usó la escritura decimal como representación semiótica en un registro aritmético y anotó ejemplos de números en escritura decimal periódica. Es decir, Néstor justificó su respuesta por medio de un proceso de infinito potencial de agregar cifras decimales en la parte decimal de un número de forma periódica como una manera de hallar números intermedios entre 0 y 1. Violeta manifestó un *pensamiento ingenuo sobre lo discreto*: al parecer, para ella, los números 0 y 1 son consecutivos. Es posible, que ella solo esté considerando 0 y 1 como números naturales, por lo que ella se encontraría en un sistema de conocimientos de dominio número natural.

Segunda fase: Resultados de las actividades de la THA

Se describen algunas actuaciones de los estudiantes de las sesiones 1, 3 y 4 (Tabla 2) durante el desarrollo de la THA.

Sesión 1. En esta sesión los estudiantes resolvieron dos actividades. En una de ellas los estudiantes realizaron una breve lectura sobre los primeros inicios del salto largo como deporte y respondieron cinco preguntas. En la Figura 1 mostramos la respuesta de Paola a la pregunta: *Según la lectura, ¿cuáles registros, de los atletas, se encuentran entre 5.40 y 7.70?* Ella responde de manera adecuada, señaló todos los registros numéricos, de los atletas, que se encuentran entre 5.40 y 7.70 (5.41, 6.20, 6.375, 7.05, 7.40, 7.51, 7.54, 7,60 y 7.605). Posteriormente, los estudiantes contestaron la pregunta: *¿Crees que 7.40 tenga sucesor? Explica tu respuesta.* En la Figura 2 se muestran las respuestas de ellos.

Según la lectura, ¿cuáles registros, de los atletas, se encuentran entre 5.40 y 7.70

5,41 - 6,20 - 6.375 - 7,05 - 7,40 - 7,51 - 7.54 - 7,60 - 7,605

Rta: Todos los registros se encuentran entre 5.40 y 7.70.

Figura 1: Respuesta de Paola (Sesión 1)

¿Crees que 7.40 tenga sucesor? Explica tu respuesta.

Paola

Rta si, porque le sigue 7,41

Violeta

Si, Porque le siguen mas numeros en este caso seria 7.41

Angie

Si, es un número decimal el sucesor es 7.41, los numeros decimales, naturales o negativos o positivos son infinitos.

Néstor

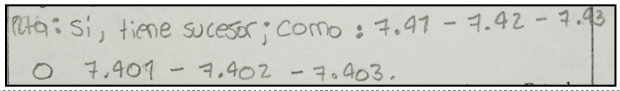


Figura 2: Respuestas de los cuatro estudiantes (Sesión 1)

Se observa en la Figura 2 que Paola, Violeta y Angie señalaron a 7.41 como el "sucesor" de 7.40. A diferencia de Néstor, que no solo escribe 7.41, sino también otros números como 7.42 y 7.43 (números con dos cifras decimales) y números como 7.401, 7.402 y 7.403 (números con tres cifras decimales) como "sucesores" de 7.40. En general, consideramos que los estudiantes creen que existe un sucesor para un número decimal que depende de la cantidad de cifras decimales (i.e. "el sucesor" de un número con una cifra decimal es otro que debe tener una cifra decimal. Sin embargo, no sabemos que podría ocurrir con un número como 7.99 (número con dos cifras decimales), creemos que los estudiantes podrían escribir 7.100 (número con tres cifras decimales).

Sesión 3. En esta sesión se llevó a cabo una actividad relacionada con progresiones aritméticas y otra con progresiones geométricas. Se planteó la hipótesis de que el estudiante pueda ver otra forma de hallar números en un intervalo, con el fin de que comprendiera la propiedad de densidad de los números racionales. Se les pidió a los estudiantes hallar cinco medios aritméticos entre 4 y 22 a partir de la expresión general del término n-ésimo de la sucesión: $u = a + (n - 1)d$, donde a es el primer término, n el número de términos y d la diferencia entre un término y el siguiente. En la Figura 3 se observa la tarea realizada por Néstor donde halló los cinco medios aritméticos entre 4 y 22 (7, 10, 13, 16 y 19) con $d = 3$. Después los estudiantes hallaron otros medios aritméticos cuando se les solicitó reducir la diferencia a la mitad (i.e. $d = 1.5 = 3/2$). En la Figura 4 se observa el trabajo realizado por Angie, donde halló los medios aritméticos en escritura decimal: 5.5, 7.0, 8.5, 10, 11.5, 13, 14.5, 16, 17.5, 19 y 20.5.

Con la información anterior [lectura sobre el salto largo] halla cinco medios aritméticos entre 4 y 22.

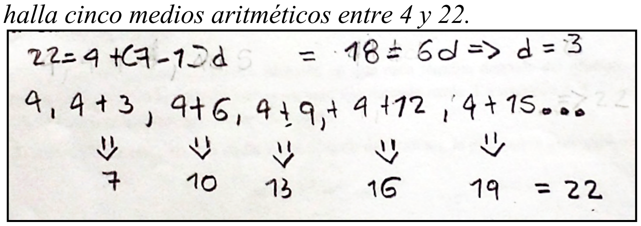


Figura 3: Respuesta de Néstor (Sesión 3)

Si d se redujera a la mitad, es decir, d=1.5, o d=3/2, ¿cuáles serían los nuevos medios aritméticos entre 4 y 22?

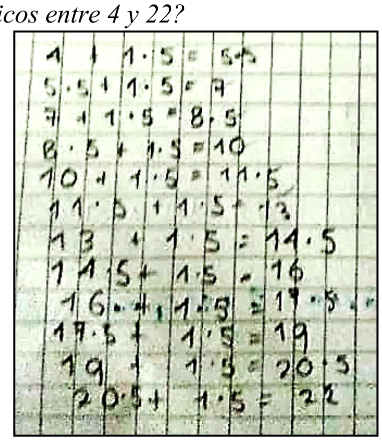


Figura 4: Respuesta de Angie (Sesión 3)

Posteriormente, los estudiantes respondieron a la pregunta: *¿Puedes hallar más números entre 4 y 22 (diferentes a los números hallados en las anteriores preguntas)? ¿Cuántos? Explica tu respuesta*. En la Tabla 4 se muestran las respuestas de los estudiantes y también intentamos clasificarlas según las categorías por Vamvakoussi y Vosniadou (2004) (Tabla 1).

Paola menciona que con la mitad de la diferencia (1.5) se pueden hallar más términos (1.5/2 = 0.75); de igual manera, con la mitad de 0.75 que es 0.375, y así de manera sucesiva. Por lo que su respuesta se encuentra en la categoría *pensamiento sofisticado sobre lo denso*, ya que justifica un proceso para hallar más números. Cabe mencionar que Paola no solo indica que con el proceso de encontrar la mitad de la diferencia se puede hallar más números sino también "duplicando". Sin embargo, al parecer, ella tiene un concepto no adecuado del término duplicación, ya que escribe 3.2, 3.3, 3.4, …, es decir, ella se refiere a sumar dos décimas, tres décimas, cuatro décimas, etc. al número 3 (que es la diferencia de la progresión aritmética). Néstor exhibe un *pensamiento ingenuo sobre lo denso* cuando afirma que se puede hallar una infinidad de números. Violeta responde que *"se pueden encontrar 10"*, es decir, una cantidad finita de números entre 4 y 22, por lo que exhibe un *pensamiento avanzado sobre lo discreto*. En esta pregunta, creemos que Angie muestra un *pensamiento avanzado sobre lo discreto*, ya que indica una cantidad finita: 3. No está claro lo que Angie quiere decir con "para las matemáticas hay muchos caminos". Es posible que ella se refiera a que hay varias soluciones de resolver un problema y que el método que ella escogió (que desconocemos) le lleva a decir 3.

Tabla 4: Respuestas de los cuatro estudiantes (Sesión 3)

¿Puedes hallar más números entre 4 y 22 (diferentes a los números hallados en las anteriores preguntas)? ¿Cuántos? Explica tu respuesta	
Respuestas de los estudiantes	Tipos de pensamiento
- Si, si tomamos la diferencia de 1.5/2 = 0,75 - También con la diferencia de 0,375 y así sucesivamente sacando la mitad o duplicando (3.2) (3.3) (3.4)...	*Paola* Pensamiento sofisticado sobre lo denso.
Rta: La Respuesta es, son infinitos.	*Néstor* Pensamiento ingenuo sobre lo denso.
se pueden encontrar 10.	*Violeta* Pensamiento avanzado sobre lo discreto.
3. Si ya que para las matemáticas hay muchos caminos yo diría que (3) números más	*Angie* Pensamiento avanzado sobre lo discreto

Sesión 4. Para esta sesión se diseñó una actividad con base en una planteada por Tovar (2011). Se plantea la hipótesis de que el estudiante pueda comprender sobre la densidad de los irracionales en los reales a partir de la propiedad de continuidad de la recta numérica. Los estudiantes construyeron un cuadrado de lado de longitud uno sobre la recta numérica desde el origen, y rotaron la diagonal del cuadrado sobre la recta en el sentido de las manecillas del reloj (ver el segmento $\overline{AX}$ en la Figura 5; ejemplo de Violeta).

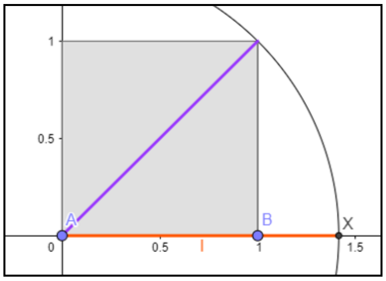


Figura 5: Gráfica de Violeta en GeoGebra (S4)

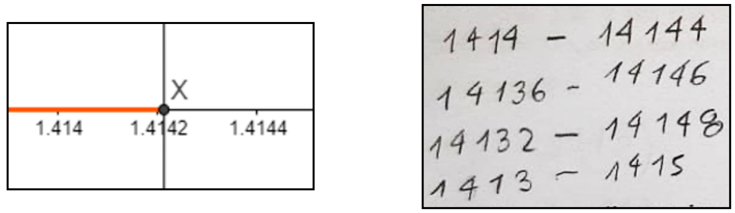


Figura 6: Gráfica en GeoGebra e intervalos escritos por Violeta que encierran al punto X (Sesión 4)

Al realizar varios zooms en GeoGebra, los estudiantes notaron que el "extremo derecho" del segmento de la diagonal no coincidía con algún número racional de la recta, mostrando así, que se puede encontrar un número irracional (en este caso $\sqrt{2}$) en un intervalo dado. Posteriormente, ellos escribieron cuatro intervalos que encerraran al punto que no coincidía con algún racional. En la Figura 6 se observa la tarea realizada por Violeta después de realizar la construcción del cuadrado de lado uno (Figura 5). Violeta escribe cuatro intervalos que contienen al punto X. Es posible que a ella se le haya olvidado escribir la coma decimal (que se usa en Colombia). Los intervalos son: (1.414, 1.4144), (1.4136, 1.4146), (1.4132, 1.4148) y (1.413, 1.415).

Tercera fase: Resultados del postest

Los estudiantes evidenciaron una evolución en sus respuestas al postest en comparación con las del pretest. Por ejemplo, Violeta escribió: "Sí hay porque hay muchos más números" en su respuesta a la pregunta: *¿Cuántos números hay entre 0 y 1?* (Figura 7). Contrario a lo que Violeta escribió en su pretest en esta misma pregunta, que indicó: "No hay ningún número porque el 0 está antes del 1" (Tabla 3), consideramos que Violeta ha podido comprender que hay números entre 0 y 1. Aunque ella indica que "hay muchos más números" no sabemos si se refiere a una cantidad finita o infinita de números. En los casos de Paola y Néstor, ellos preservaron la misma idea de que hay infinidad de números en un intervalo dado, tanto en el desarrollo del pretest como del postest. Sin embargo, durante el pretest Paola no justificó como encontrar números intermedios en un intervalo, mientras que en el postest ya pudo justificar un método para encontrar estos números. Angie también mencionó la existencia de una infinidad de números intermedios en un intervalo durante el desarrollo del pretest; sin embargo, durante el postest habló sobre infinidad de "intervalos" y no justificó el por qué de su respuesta.

¿Cuántos números hay entre 0 y 1?

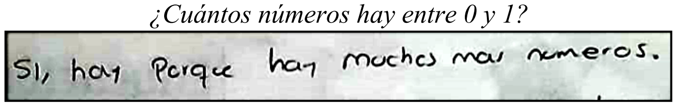


Figura 7: Respuesta de Violeta al postest

Conclusiones

Consideramos que el trabajo de investigación buscó maneras de promover, en estudiantes de bachillerato, procedimientos para hallar números intermedios en un intervalo que implicó en varias actividades un aprendizaje y una comprensión hacia la densidad numérica. Estas actividades de la THA incluyeron temas de la matemática escolar como progresiones aritméticas y geométricas, la construcción de un cuadrado de lado de longitud uno, semejanza de triángulos y primeros acercamientos a la propiedad de densidad de los números decimales.

Observamos que los estudiantes no parecían interpretar "sucesor" correctamente. Al parecer, la idea de un sucesor para los estudiantes era un número mayor al dado, o aquel que le sigue en un subconjunto de números con mismas características (misma cantidad de cifras decimales). Por ello, es necesario reconsiderar cómo plantear las preguntas relacionadas con la existencia de un sucesor en un conjunto que no sea el de los números naturales o el de los enteros. Es decir, debemos (re)diseñar las actividades que permita que los estudiantes se percaten de la inexistencia de un sucesor en los conjuntos de los números racionales (expresados como fracciones, y/o como números decimales), y reales.

Agradecimientos

A Conacyt y a Cinvestav por el financiamiento de este trabajo de investigación.

Referencias

Cabarcas, B., y Soler, C. (2017). Aproximación a la propiedad de densidad del conjunto de los números racionales desde las representaciones en el registro como fracción y el registro decimal [Tesis de Maestría, Pontificia Universidad Javeriana]. https://repository.javeriana.edu.co/handle/10554/37869

Cobb, P., & Gravemeijer, K. (2008). Experimenting to support and understand learning processes. In A.E. Kelly, R.A. Lesh y J.Y. Baek (Eds.). *Handbook of design research methods in education. Innovations in Science, Technology, Engineering and Mathematics Learning and Teaching*, (pp. 68-95). Lawrence Erlbaum Associates.

Duval, R. (2004). *Semiosis y Pensamiento Humano. Registros Semióticos y Aprendizajes Intelectuales*. Universidad del Valle.

Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *La gaceta de la RSME, 9.1*, 143-168.

González-Forte, J. M., Fernández C., Van Hoof, J. y Van Dooren, W. (2021). Formas de responder sobre la densidad de los números racionales de estudiantes de primaria y secundaria. En Diago, P. D., Yáñez D. F., González-Astudillo, M. T. y Carrillo, D. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXIV* (pp. 319 – 326). Valencia: SEIEM.

Levin, O. (2021). *Discrete Mathematics: An Open Introduction.* (3ª ed.). Independently Published.

Matemática discreta. (2021, 30 de octubre). *Wikipedia, La enciclopedia libre*. https://es.wikipedia.org/w/index.php?title=Matem%C3%A1tica_discreta&oldid=139389762.

McMullen, J., & Van Hoof, J. (2020) The role of rational number density knowledge in mathematical development. *Learning and Instruction*, 65, 101228. https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2019.101228

Moreno, L., & Sacristán, A. (1996). Representaciones y Aprendizaje. *Investigaciones en Matemática Educativa*, 277-289. Grupo Editorial Iberoamérica.

Neumann, R. (1998). Students' ideas on the density of fractions. In H. G. Weigand, A. Peter-Koop, N. Neil, K. Reiss, G. Törner, & B. Wollring (Eds), *Proceedings of the annual meeting of the Gesellschaft fur Didaktik der Mathematik* (pp. 97-104). http://webdoc.sub.gwdg.de/ebook/e/gdm/1998/

Peano, J. (1979). *Los principios de la aritmética. Expuestos según un nuevo método* (Trad. J. Velarde). Pentalfa Ediciones. (Trabajo original publicado en 1889).

Simon, M. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26, 114–145. https://doi.org/10.2307/749205

Suárez-Rodríguez, M., & Figueras, O. (2020). An approach to density in decimal numbers: a study with pre-service teachers. In A.I. Sacristán, J.C. Cortés-Zavala & P.M. Ruiz-Arias, (Eds.). *Mathematics Education Across Cultures: Proc. 42nd Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Mexico* (pp. 803-819). Cinvestav / AMIUTEM / PME-NA. https:/doi.org/10.51272/pmena.42.2020-122

Suárez-Rodríguez, M., & Sacristán, A. I. (2022). Different ways of learning number density: a hypothetical trajectory with high school students. In A. E. Lischka, E. B. Dyer, R. S. Jones, J. Lovett, J. Strayer & S. Drown, (Eds). *Proceedings of the 44th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 911-928). Middle Tennessee State University.

Tovar, J. (2011). *Un acercamiento al concepto y completitud de los números reales* [Tesis de maestría, Universidad Nacional de Colombia].

https://repositorio.unal.edu.co/bitstream/handle/unal/10182/johnedinsontovargil.2011.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Vamvakoussi, X., & Vosniadou, S. (2004). Understanding the structure of the set of rational numbers: A conceptual change approach. *Learning and Instruction*, *14*, 453-467. doi:10.1016/j.learninstruc.2004.06.013

Vamvakoussi, X. y Vosniadou, S. (2010). How many decimals are there between two fractions? Aspects of secondary school students' understanding of rational numbers and their notation. *Cognition and Instruction*, *28*(2), 181-209. https://doi.org/10.1080/07370001003676603